بسم الله الرحمن الرحیم

راهنمای کاربری

مطالعه و بررسی گشتاورماند اجسام

فیزیک دانشگاهی

سخنی با مشتری

مشتری گرامی : از اینکه شرکت صنایع آموزشی را برای تجهیز آزمایشگاه خود انتخاب کرده اید سپاسگزاریم.
امید است ارائه این‌مجموعه بتواند در دستیابی به اهداف آموزشی شما کاربر گرامی موثر باشد.

خواهشمند است با ارائه نظرات خود از طریق صدای مشتری، در راستای نیل به اهداف آموزشی و بالا بردن کیفیت محصولات ما را یاری فرمایید.

صنایع آموزشی

ناشر:	شرکت صنایع آموزشی (متعلق به صندوق ذخیره فرهنگیان)
مؤلف:	نعمت ا... دوستی ـ بنت‌الهدی صادقی
طراح جلد، صفحه‌آرا:	سها همایی
نوبت چاپ و انتشار:	اول ۱۳۹۰
آماده‌سازی و نظارت بر چاپ:	سها همایی
نشانی:	تهران، جاده مخصوص کرج، بعدازکیلومتر ۷، بزرگراه آزادگان (به طرف جنوب)،خیابان دهم (قبل از پمپ بنزین) شهرک استقلال، بلوار دکترعبیدی، خیابان شهید جلال
صندوق پستی:	۱۳۴۴۵-۳۷۹
تلفن واحد فروش:	۷- ۴۴۵۴۵۲۹۵ (۰۲۱)
دورنگار:	۴۴۵۴۵۲۹۴ (۰۲۱)
صدای مشتری:	۴۴۵۴۵۴۳۹ (۰۲۱)
روابط عمومی:	۴۴۵۴۵۴۸۵ (۰۲۱)
سایت اینترنتی:	www@eei-co.com
پست الکترونیکی:	info@eei-co.com

«کلیه حقوق تألیف و انتشار برای شرکت صنایع آموزشی محفوظ است»

فهرست مطالب

مقدمه	۵
فصل یکم : معرفی و شرح اصول استفاده از محصول	۶
۱ـ۱ـ فهرست اقلام	۶
۱ـ۲ـ روش ارزیابی سالم بودن قطعات	۹
۱ـ۳ـ خدمات پس از فروش	۹
فصل دوم : شرح کاربرد محصول در فرآیند آموزش	۱۰
۲ـ۱ـ مفاهیم آموزشی	۱۰
۲ـ۲ـ تئوری	۱۰
۲ـ۳ـ روش آزمایش	۱۳
۲ـ۴ـ آزمایش (۱) : تعیین ضریب سختی پیچشی فنر	۱۳
۲ـ۵ـ آزمایش (۲) : تعیین گشتاور ماند اجسام با شکل‌های هندسی متفاوت	۱۵
۲ـ۶ـ آزمایش (۳) : بررسی اثر محورهای موازی در گشتاور ماند	۱۷
۲ـ۷ـ روش‌های ریاضی محاسبات خطا	۱۸
۲ـ۸ ـ زمان سنج وشمارنده	۲۴

صنایع آموزشی

مقدمه

انجام کار عملی و آزمایشگاهی و نقش آن در تفهیم مفاهیم آموزشی بر کسی پوشیده نیست. تجربه نشان داده است که چه بسا دانشجویان بسیاری هستندکه آزمون‌های مختلفی را در دوران تحصیل خویش پشت سر می‌گذارند ولی در هنگام مواجهه با موضوعات روزمره در محیط کار و زندگی از مطالب فرا گرفته شده نمی‌توانندااستفاده کنند. به عبارت دیگر مفهوم های علمی در ذهن آنها به خوبی شکل نگرفته است.

یکی از علت‌های مهم پیشرفت کشورهای توسعه یافته نوع نگرش این کشورها به نقش آزمایشگاه و کار تجربی می‌باشد و این موضوع در استفاده گسترده وسایل آموزشی در مقاطع مختلف تحصیلی این کشورها کاملاًمشهود است.

گروه فیزیک شرکت صنایع آموزشی با توجه به اهمیت نقش و جایگاه آموزش علمی (مفاهیم علمی) در توسعه کشور و در راستای اهداف آموزش عمیق مفاهیم فیزیک، بر انگیختن حس جستجوگری در دانشجویان و ترویج فرهنگ کار گروهی در بین آنها اقدام به طراحی و تولید تجهیزات آزمایشگاهی در سطح دانشگاه نموده است.

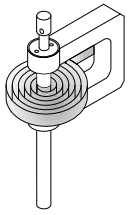
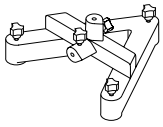
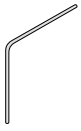
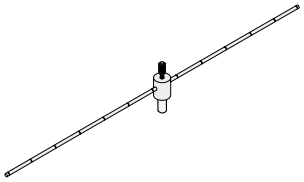
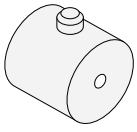
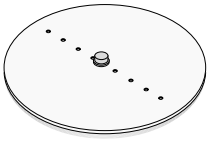
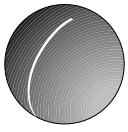
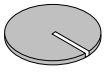
در راستای نیل به این هدف و نیاز مراکز آموزش عالی این شرکت توانسته است با استفاده از تیم‌های تخصصی و کارشناسی و تجربه اساتید دانشگاه و مؤلفین کتب دانشگاهی مجموعه کاملی را در ساخت و تجهیز آزمایشگاه‌های فیزیک پایه (مکانیک، حرارت، الکتریسیته و مغناطیس) ارایه نموده است. این مجموعه‌ها بر اساس مطالب درسی کتاب‌های جامع آموزش فیزیک دانشگاهی طراحی و تولید شده است، که منطبق با سرفصل‌های آموزشی وزارت علوم، تحقیقات و فن آوری می‌باشد.

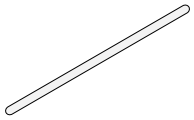
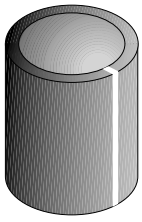
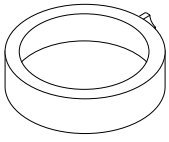
از اساتید وکاربران گرامی خواهشمندیم تجارب خود را در رابطه با بهینه‌سازی تجهیزات و دستورکار مجموعه با شرکت صنایع آموزشی ـ دپارتمان فیزیک مکاتبه و یا به سایت شرکت مراجعه نمایند.

در پایان از همکارانی که ما را در این امر یاری کردند، کمال تشکر را داریم.

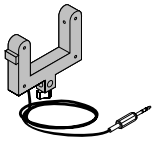
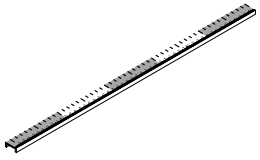
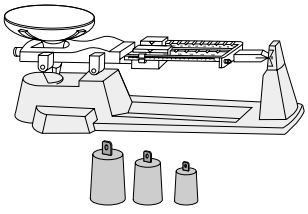
فصل یکم: معرفی و شرح اصول استفاده از محصول

۱ـ۱ـ فهرست اقلام محصول:

ردیف	نام	مشخصات	تعداد	تصویر
۱	فنر پیچشی با نگهدارنده و میله اتصال	فنر پیچشی با ضریب سختی معین	۱	
۲	پایه A شکل زبانه دار	پایه چدنی با پیچ باکالیتی	۱	
۳	میله L شکل	میله فلزی به قطر حداقل ۴میلی متر و علامت دهنده به حسگر U شکل	۱	
۴	میله مدرج با استوانه اتصال	میله فلزی به طول ۶۰ cm و استوانه آلومینیومی برای اتصال میله مدرج به دستگاه	۱	
۵	وزنه استوانه‌ای با پیچ اتصال	وزنه استوانه‌ای فلزی و پیچ برنجی برای اتصال به میله مدرج	۲	
۶	دیسک فلزی سوراخ‌دار با استوانه اتصال	صفحه دایره‌ای آلومینیومی سوراخ‌دار با استوانه برنجی برای اتصال به دستگاه	۱	
۷	کره پلاستیکی	گیره پلی اتیلنی مشکی رنگ	۱	
۸	قرص پلاستیکی	صفحه دایره‌ای از جنس پلی اتیلن	۱	

ردیف	نام	مشخصات	تعداد	تصویر
۹	میله ۲۵ cm	میله آهنی به قطر ۱۰ میلی متر و طول ۲۵ سانتی متر	۱	
۱۰	استوانه توپر	استوانه توپر پلی اتیلنی مشکی رنگ	۱	
۱۱	استوانه تو خالی با جدار نازک	فلزی مشکی رنگ	۱	
۱۲	استوانه توخالی با جدار ضخیم	پلی اتیلنی مشکی رنگ	۱	
۱۳	نگهدارنده استوانه ها	صفحه آلومینیومی برای قرار دادن استوانه‌ها روی دستگاه	۱	

* اقلام زیر در صورت درخواست مشتری ارسال می‌گردد :

ردیف	نام	تعداد	تصویر
۱	زمان سنج شمارنده	۱	
۲	حسگر U شکل	۱	
۳	خط کش ۵۰ سانتی‌متری	۱	
۴	ترازو سه اهرمی با دقت ۰/۱ گرم	۱	

۱ـ۲ـ روش ارزیابی سالم بودن قطعات

ـ حسگر نوری متصل به زمان سنج را می‌توان با روشن کردن دستگاه و تنظیم آن برای تعدادی نوسان مورد ارزیابی قرار داد. چنانچه با عبور چندین مرتبه انگشت دست از بین دو شاخه حسگر، دستگاه به کارافتاد، نشان می‌دهد دستگاه سالم می‌باشد.

ـ برای ارزیابی سالم بودن فنر دستگاه، لازم است میله به طول ۶۰ سانتی‌متر را در جای خود قرار داده و به میزان مشخصی مثلاً ۹۰ درجه منحرف کنیم، چنانچه میزان انحراف به چپ و انحراف به راست تقریباً یکسان بود، فنردستگاه سالم است.

توجه : دستگاه را هرگز نباید بیش از ۱۲۰ درجه منحرف کرد، زیرا باعث معیوب شدن و یا شکستن آن می‌شود.

۱ـ۳ـ خدمات پس از فروش

شرکت صنایع آموزشی به منظور رفع نیازها و مشکلات و نیز ارتقاء سطح رضایت‌مندی مشتریان محترم، خدمات پس از فروش برای محصولات خود را به شرح زیر ارائه می‌دهد :

ـ تأمین قطعات و پشتیبانی پس از فروش به مدت پنج سال

ـ تضمین کیفیت و کارایی محصول به مدت یک سال (پس از مدت ضمانت در صورت بروز نقص یا اشکال در محصول هزینه تعمیر یا تعویض دریافت می‌شود).

* در صورت بروز هرگونه مشکل در به کارگیری محصول می‌توانید با واحد خدمات پس از فروش این شرکت تماس حاصل فرمایید.

فصل دوم: شرح کاربرد مجموعه در فرایند آموزش

۲ـ۱ـ مفاهیم آموزشی

مجموعه آموزشی گشتاور ماند برای توسعه مفاهیم زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

- آموزش حرکت نوسانی و اندازه‌گیری دوره تناوب آن ؛
- آموزش ارتباط بین دوره تناوب و گشتاور ماند اجسام ؛
- آموزش ارتباط بین گشتاور ماند اجسام با شکل هندسی و جرم آن ؛
- آموزش ارتباط گشتاور ماند اجسام و محور دورانی که حول آن دوران می‌کند ؛
- آموزش ارتباط گشتاور ماند با قضیه محورهای موازی ؛
- بررسی و مقایسه مقادیر بدست آمده از طریق تئوری و عملی.

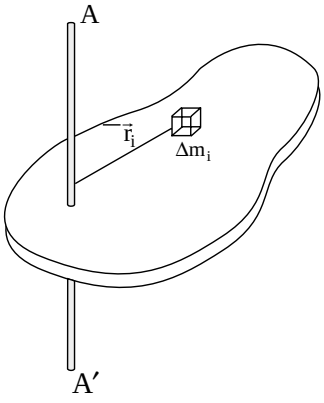
۲ـ۲ـ تئوری

برای چرخش یک جسم حول یک محور، نیاز به گشتاور نیرو داریم. حاصل ضرب نیرو در بازوی گشتاور را گشتاور نیرو(لنگر) حول محور چرخش می‌نامند و به صورت زیر نمایش می‌دهند :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (۱)$$

که در آن $\vec{F}$ نیرو، $\vec{r}$ بازوی گشتاور (فاصله نقطه اثر نیرو تا محور دوران) و $\vec{\tau}$ گشتاور نیرو است. در دینامیک دورانی، به جای m، v، a و x در حرکت انتقالی ؛ مقادیر I، ω، α و θ به کار برده می‌شود و همچنین به جای نیرو ($\vec{F}$)، گشتاور نیرو($\vec{\tau}$) استفاده می‌گردد. محاسبه گشتاور ماند(I) حول یک محور ممکن است بسیار پیچیده و به حساب انتگرال نیاز داشته باشد. در عمل، اساساً جرم کل یک جسم را به عناصر بسیار کوچک تقسیم کرده و سهم هر عنصر کوچک در گشتاور ماند کل را محاسبه می‌نمایند و آن گاه همه این سهم‌ها را با هم جمع می‌کنند. به عنوان مثال برای تعیین گشتاور ماند جسم تختی با شکل نامنظم(مانند شکل ـ ۱)، فرض می‌کنیم که این جسم به جرم‌های بسیار کوچک و مجاور هم $\Delta m_۱$ ، $\Delta m_۲$ ، $\Delta m_۳$ ، ... و Δm_n تقسیم شده باشد گشتاور ماند ΔI_i ناشی از جرم کوچک Δm_i واقع در فاصله r_i از محور AA' عبارت است از :

$$\Delta I_i = \Delta m_i r_i^۲ \qquad (۲)$$



(شکل ـ ۱)

و کل گشتاور ماند جسم حول AA' به این قرار است :

$$I = \sum \Delta I_i = \sum \Delta m_i r_i^2 \qquad (۳)$$

گشتاور ماند برخی از اشکال هندسی ساده به آسانی قابل محاسبه است، به عنوان مثال برای یک کره توپر حول محوری که از قطرش می‌گذرد برابر است با :

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

چنان چه جسمی حول محوری بچرخدکه موازی است با محوری که از مرکز جرمش می‌گذرد، گشتاور ماند آن از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$I_d = I_{cm} + Md^2 \qquad (۴)$$

که درآن M، جرم جسم، I_{cm} گشتاور ماند حول محوری که از مرکزجرم می‌گذرد و d فاصله محور دوران تا مرکز جسم است. برای بررسی معادلات حرکت دورانی می‌توان آن را با معادلات حرکت انتقالی مقایسه نمود (در مقایسه با قانون دوم نیوتن $F = ma$) و بنابراین داریم :

$$\tau = I\alpha \qquad (۵)$$

در اینجا کل کار خود را بر روی گشتاور τ حاصل از یک فنر مارپیچ (حلزونی) به ضریب سختی پیچشی k که ابتدای آن در نقطه‌ای ثابت نگه داشته شده و وسط آن به یک میله فلزی که نقش محور دوران را ایفا می‌کند متمرکز می‌نماییم. در این حالت معادله حرکت خواهد شد :

$$\tau = -k\theta \qquad \Rightarrow \qquad -k\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (۶)$$

$$\therefore \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0 \qquad (۷)$$

معادله (۷)، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بوده و یکی از جواب‌های آن عبارت است از :

$$\theta = \theta_0 Cos\omega t \qquad (۸)$$

با گرفتن دیفرانسیل از معادله (۸) خواهیم داشت :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \omega Sin\omega t \quad \text{و} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta_0 Cos\omega t \qquad (۹)$$

و با قراردادن معادله (۹) در معادله (۷) شرط زیر حاصل خواهد شد :

$$-I\omega^2\theta_0 Cos\omega t + k\theta_0 Cos\omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad -I\omega^2 + k = 0$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (۱۰)$$

از آن جایی که $T = \frac{2\pi}{\omega}$ دوره تناوب حرکت نوسانی می‌باشد پس :

$$T = 2\pi/(\sqrt{\frac{k}{I}}) = 2\pi\,(\sqrt{\frac{I}{k}}) \qquad (۱۱)$$

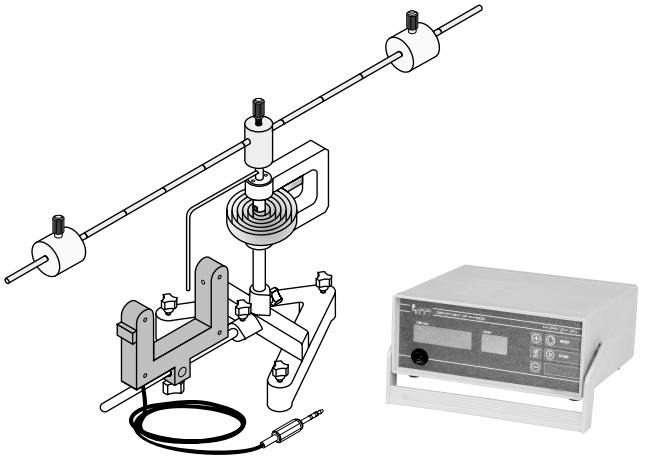
با استفاده از معادله (۱۱)، چنان چه بتوان مقدار T را اندازه‌گیری کرده و با داشتن k (ضریب سختی پیچشی فنر)، می‌توان مقدار گشتاور ماند، I ، اجسام مختلف را به دست آورد.

۲ـ۳ـ روش آزمایش:

ابتدا جرم تمامی اجسام موجود و قطر آن‌ها (در مورد استوانه تو خالی با پوسته ضخیم، شعاع داخلی را هم اندازه بگیرید) را با خط‌کش اندازه‌گیری کرده و درجدول(۲) یادداشت کنید.

۲ـ۴ـ آزمایش (۱): تعیین ضریب سختی پیچشی فنر

قطعه نگه‌دارنده میله نازک را بر روی محور دوران در بالای پایه دستگاه در جای خود قرار دهید. میله نازک را از سوراخ تعبیه شده در قطعه عبور داده و طوری آن را ببندید که طول دو طرف میله از قطعه به یک اندازه باشد. پیچ مربوطه را محکم کنید. وزنه‌های فلزی را که قبلاً جرم آن‌ها m_i را اندازه گرفته‌اید، در دو انتهای میله طوری ببندید که فاصله آن‌ها تا محور دوران یکسان باشد (وسط وزنه روی خط‌های میله قرار گیرد)، این فاصله را یادداشت کنید.



زمان سنج را برای اندازه‌گیری ۵ نوسان آماده کنید. میله را به اندازه‌ای در حدود 12° درجه از حالت تعادل تغییر مکان دهید. هم زمان با رها کردن آن زمان سنج را به کار انداخته و تعداد پنج نوسان کامل(هر رفت و برگشت یک نوسان کامل است) را اندازه بگیرید و از روی آن دوره تناوب این حالت دستگاه را محاسبه کنید و در جدول (۱) بنویسید. سپس هر دو وزنه را به اندازه ۵ cm به سمت محور دوران تغییر مکان داده و مجدداً دوره تناوب آن را اندازه بگیرید. این عمل را برای حداقل پنج فاصله مختلف تکرار کرده و نتایج را در جدول (۱) ثبت کنید.

جدول (۱)

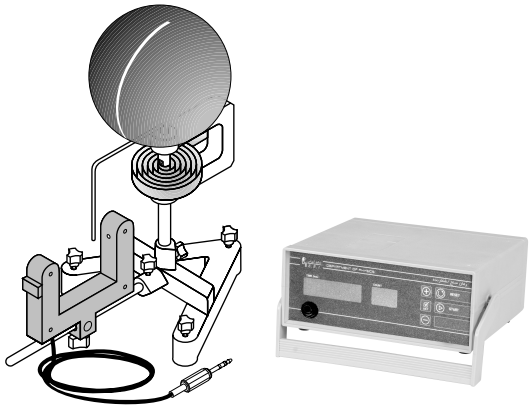
ردیف	فاصله وزنه از محور (r_i)	$5T$ (s)	T (s)	T^2 (s^2)
۱				
۲				
۳				
۴				
۵				

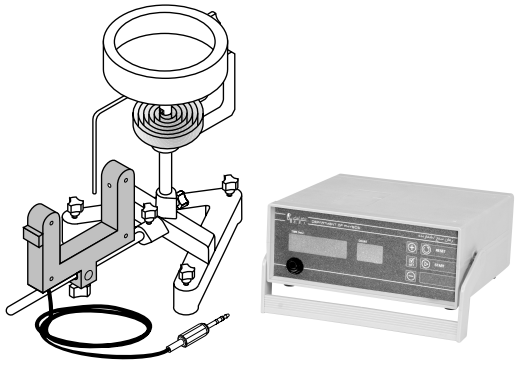
با استفاده از داده‌های جدول (۱)، T^2 را برابر y و $I_i = \sum I_n = 2mr_i^2 + \frac{Ml^2}{12}$ را برابر x بگیرید (l طول میله و M جرم میله می‌باشد)، معادله خط $y = ax$ را با استفاده از روش حداقل مربعات مانده‌ها برای حالتی که خط از مبدأ می‌گذرد محاسبه کنید. از روی ضریب زاویه خط، a و با استفاده از معادله (۱۱) مقدار k را به دست آورید. نمودار خط بدست آمده را رسم کنید.

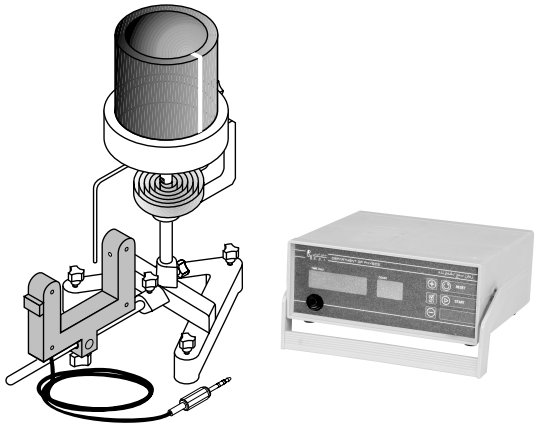
۲ـ۵ـ آزمایش (۲) : تعیین گشتاور ماند اجسام با شکل‌های هندسی متفاوت

دوره تناوب اجسام با شکل‌های هندسی متفاوتی که در اختیار دارید را، با اندازه‌گیری پنج نوسان به دست آورید. با داشتن مقدار k (که از آزمایش ـ۱ محاسبه کردید) مقدار I آزمایش را از رابطه ـ۱۱ محاسبه کنید هر دو را در جدول(۲) بنویسید. با داشتن قطر، شعاع داخلی و خارجی استوانه‌ها و قطر کره و صفحه مدور (که به کمک خط‌کش اندازه گرفته اید)، گشتاور ماند اجسام را محاسبه کنید و مقادیر I محاسبه شده و نتایج بدست آمده از طریق آزمایش را مقایسه و در مورد نتایج آن بحث کنید.

تذکر : هنگام محاسبه گشتاور ماند استوانه‌ها، حتماً جرم نگه دارنده را به جرم استوانه‌ها اضافه نمایید.





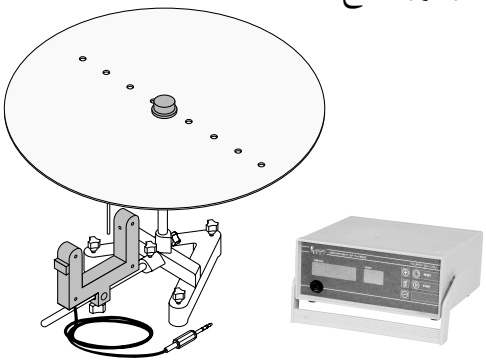


جدول (۲)

ردیف	شکل هندسی	قطر جسم	M	T	I آزمایش	I محاسبه
۱	استوانه توپر					$\frac{۱}{۲}MR^۲$
۲	استوانه توخالی با جدار نازک					$MR^۲$
۳	استوانه دارای ضخامت					$\frac{۱}{۲}M(R_۱^۲ + R_۲^۲)$
۴	کره تو پر					$\frac{۲}{۵}MR^۲$
۵	قرص پلاستیکی					$\frac{۱}{۲}MR^۲$
۶	صفحه فلزی					$\frac{۱}{۲}MR^۲$

۲ـ۶ـ آزمایش (۳) بررسی اثر محورهای موازی در گشتاور ماند

در آزمایش گشتاور ماند دیسک فلزی را، برای حالتی که محور دوران از مرکز جرم می‌گذرد را با اندازه‌گیری دوره تناوب و قطر دیسک و با داشتن مقدار k محاسبه گردید. در این آزمایش مقادیر گشتاور ماند را برای حداقل چهارمحور دیگر که موازی محوری است که از مرکز جرم می‌گذرد با اندازه‌گیری ۵ دوره تناوب و با استفاده از رابطه ـ۱۱ به دست آورید ونتایج را با نتایجی که از رابطه (۴) به دست می‌آید در جدول (۳) نوشته و مقایسه کنید. در مورد نتایج بحث کنید.



جدول (۳)

ردیف	M	R	d	T	I آزمایش	I محاسبه

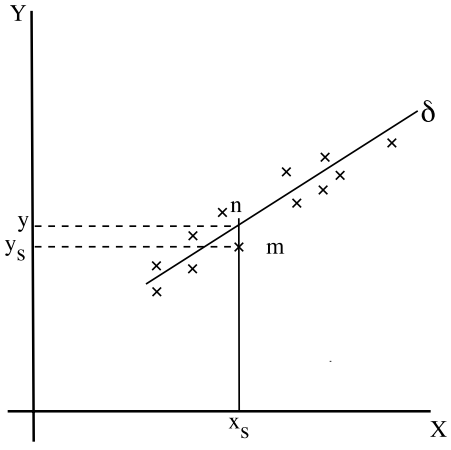
خواسته:

۱ـ انحراف از معیار $\bar{k}$ را بدست آورده و $\bar{k}$ را تصحیح ارقام نمایید.

۲ـ برای یکی از حالات آزمایش ۱، خطای k را از روش دیفرانسیل لگاریتمی محاسبه خطا کرده و سپس تصحیح ارقام نمایید.

۲ـ۷ـ روش های ریاضی محاسبات خطا
رسم بهترین خط به وسیله روش حداقل مربعات مانده ها:

در آزمایشی به ازای تغییرات x_N و x_{N-1} و ... و x_2 و x_1 مقادیر متناظر y_N و y_{N-1} و ... و y_2 و y_1 به دست آمده است. بین x و y (همبستگی) رابطه خطی برقرار می‌باشد. نقاط فوق را در دستگاه مختصات xoy رسم می‌کنیم. مطابق شکل (۴)، نقاط به دست آمده به طور پراکنده در اطراف خط δ به معادله $y = ax + b$ قرار گرفته‌اند. هدف پیداکردن مناسب ترین خط است که به واقعیت نزدیک‌تر باشد. برای این منظور، روش حداقل مربعات مانده‌ها را به کار می‌بریم. چنان که در نمودار شکل(۴) مشاهده‌می‌شود، به ازای طول $x = x_s$ مقدار y ، برابر y_s نخواهد بود. مثلاً در شکل نقطه m را مشخص کرده‌ایم ولی با به کاربردن معادله خط نقطه n بدست آمده است. بنابراین خطایی وجود دارد، این خطا را مانده می‌نامند، مقدار مانده برای نقطه Sام به صورت $d_s = ax_s + b - y_s$ می‌باشد. مجموع مربعات مانده‌ها برابر است با :



$$\sum_{s=1}^{N} = \sum_{s=1}^{N} (ax_s + b - y_s)^2$$

شکل ـ (۲)

بهترین خط وقتی به دست می‌آید که عبارت فوق کمینه باشد، یعنی a و b را باید طوری تعیین کنیم که مجموع مربعات مانده‌ها کمینه گردد. برای این منظور باید مشتق عبارت فوق بر حسب a و b را مساوی صفر قرار دهیم و از معادلات به دست آمده که آن‌ها را معادلات نرمال گویند، مقدار a و b رابه دست آوریم :

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{N} 2x_s(ax_s + b - y_s) = 0 \\ \sum_{s=1}^{N} 2(ax_s + b - y_s) = 0 \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} x_1(ax_1+b-y_1)+x_2(ax_2+b-y_2)+\ldots+x_{N-1}(ax_{N-1}+b-y_{N-1})+x_N(ax_N+b-y_N)=0 \\ (ax_1+b-y_1)+(ax_2+b-y_2)+\ldots+(ax_{N-1}+b-y_{N-1})+(ax_N+b-y_N)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2)+b(x_1+x_1+\ldots+x_N)-(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_Ny_N)=0 \\ a(x_1+x_2+\ldots+x_{N-1}+x_N)+Nb-(y_1+y_2+\ldots+y_{N-1}+y_N)=0 \end{cases}$$

برای راحتی کار، ضرایب معادلات فوق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$x_1^2+x_2^2+x_{N-1}^2+x_N^2=\sum_{s=1}^{N}x_s^2=[xx]$$

$$x_1+x_2+x_{N-1}+x_N=\sum_{s=1}^{N}x_s=[x]$$

$$x_1y_1+x_2y_2+x_{N-1}y_{N-1}+x_Ny_N=\sum_{s=1}^{N}x_sy_s=[xy]$$

حال معادلات نرمال به صورت زیر درمی‌آیند :

$$\begin{cases} a[xx]+b[x]=[xy] \\ a[x]+Nb=[y] \end{cases}$$

ازحل دستگاه معادلات فوق a و b نتیجه می‌شود :

$$a=\frac{N[xy]-[x][y]}{N[xx]-[x][x]} \qquad b=\frac{[y][xx]-[x][xy]}{N[xx]-[x][x]} \qquad (3)$$

در صورتی که خط از مبدا مختصات بگذرد $b=0$ است. بنابراین :

$$a=\frac{[xy]}{[xx]}$$

مثال : تغییرات x و y که به طور خطی است، به صورت زیر می‌باشد :

x	y	xy	xx
۰	۴/۶	۰	۰
۱	۷/۱	۷/۱	۱
۲	۹/۵	۱۹/۰	۴
۳	۱۱/۵	۳۴/۵	۹
۴	۱۳/۷	۵۴/۸	۱۶
۵	۱۵/۹	۷۹/۵	۲۵
۶	۱۸/۶	۱۱۱/۵	۳۶
۷	۲۰/۹	۱۴۶/۳	۴۹
۸	۲۳/۵	۱۸۸/۰	۶۴
۹	۲۵/۴	۲۲۸/۶	۸۱
۴۵	۱۵۰/۷	۸۶۹/۴	۲۸۵

جمع :

$[xy]=۸۶۹/۴$ و $[xx]=۲۸۵$ و $[y]=۱۵۰/۷$ و $[x]=۴۵$ و $N=۱۰$

بنابراین معادلهٔ خطا $y=ax+b$ به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} a=\dfrac{۱۰\times ۸۶۹/۴-۴۵\times ۱۵۰/۷}{۱۰\times ۲۸۵-۴۵\times ۴۵}=\dfrac{۱۹۱۲/۵}{۸۲۵}=۲/۳۲ \\ b=\dfrac{۱۵۰/۷\times ۲۸۵-۴۵\times ۸۶۹/۴}{۱۰\times ۲۸۵-۴۵\times ۴۵}=\dfrac{۳۸۲۶/۵}{۸۲۵}=۴/۶۴ \end{cases}$$

$$y=۲/۳۲x+۴/۶۴$$

محاسبه خطا با استفاده از مشتقات جزیی

تابع z که تابعی از دو متغیر x و y می‌باشند به صورت $z = f(x,y)$ در نظر می‌گیریم. مشتق جزیی z بر حسب x و یا y را به صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نظر می‌گیرند. در موقع محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ (مشتق جزیی z نسبت به x)، y را ثابت گرفته و مشتق z را نسبت به x به دست می‌آوریم و به همین طریق برای محاسبه $\frac{\partial z}{\partial y}$ (مشتق جزیی z نسبت به y)، x را ثابت فرض کرده و مشتق z را نسبت به y به دست می‌آوریم. دیفرانسیل تابع فوق به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$$

$$dz = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy \qquad (۶)$$

برای محاسبه خطای تابع z ، از طرفین رابطه دیفرانسیل می‌گیریم تا رابطه (۶) حاصل شود. سپس با تبدیل $dx \to \Delta x$ و $dy \to \Delta y$ و $d)dz \to \Delta z$ را تبدیل به Δ می‌کنیم چون dx یک کمیت ریاضی و Δx یک کمیت فیزیکی قابل اندازه‌گیری می‌باشد)، رابطه (۶) به صورت زیر حاصل می‌شود :

$$\Delta z = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y \qquad (۷)$$

Δz مقدار خطای مطلق و $\frac{\Delta z}{z}$ را خطای نسبی z گویند.

گاهی می‌توانیم برای راحتی کار از طرفین تابع دیفرانسیل لگاریتمی بگیریم، یعنی ابتدا لگاریتم گرفته و سپس دیفرانسیل آن را ا حساب کنیم. روش کار به این صورت است :

$$z = f(x,y)$$

$$\log z = \log f(x,y)$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{df(x,y)}{f(x,y)} = \frac{f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)}{f(x,y)}$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \left|\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}\right| \Delta x + \left|\frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}\right| \Delta y$$

که خطای نسبی $\frac{\Delta z}{z}$ و خطای مطلق Δz قابل محاسبه است.

واضح است که دو روش فوق برای محاسبه خطا، به نتیجه یکسان منجر می‌شود. پس می‌توانیم با توجه به شکل تابع، برای سهولت محاسبات، روش مناسب را برگزینیم.

مثال : خطای مطلق و نسبی تابع $z = \frac{ax^۲ + by^۲}{xy^۲}$ را پیدا کنید.

برای این کار از طرفین رابطه دیفرانسیل لگاریتمی می‌گیریم :

$$\log z = \log(ax^۲ + by^۲) - \log x - \log y^۲$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{۲axdx + ۲bydy}{ax^۲ + by^۲} - \frac{dx}{x} - \frac{۲dy}{y}$$

$$\frac{dz}{z} = \left|\frac{۲ax}{ax^۲ + by^۲} - \frac{۱}{x}\right| \Delta x + \left|\frac{۲by}{ax^۲ + by^۲} - \frac{۲}{y}\right| \Delta y$$

چون جهت خطا مشخص نیست، پس قدر مطلق ضرایب Δx و Δy را در نظر می‌گیریم تا حداکثر خطا به دست آید. چنان که ملاحظه می‌شود، گاهی استفاده از دیفرانسیل لگاریتمی برای محاسبه خطا، حجم محاسبات را کمتر می‌کند.

تصحیح ارقام کمیت اندازه‌گیری شده به وسیله خطای آن

فرض کنیم در اندازه‌گیری طول جسمی به وسیله خط‌کشی که تا یک میلی‌متر مندرج است. عدد ۴/۷ میلی‌متر را تخمین بزنیم. طول این جسم را با اسباب اندازه‌گیری دقیق‌تری، مثلاً ریز سنج که تا ۰/۰۱ میلی‌متر دقت دارد، اندازه‌گیری می‌کنیم که عدد ۴/۶۸ میلی‌متر به دست می‌آید. در اندازه‌گیری اول طول جسم که عدد ۴/۷ میلی‌متر به دست آمد، می‌گوییم طول جسم با دو رقم معنی‌دار به دست آمده است. رقم۴، رقم مطمئن و رقم۷، رقم مشکوک است. زیرا در اندازه‌گیری طول جسم با ریزسنج که دقیق‌تر است، عدد ۴/۶۸ میلی‌متر به دست آمده است یعنی به جای ۰/۷ باید ۰/۶۸ را در نظر بگیریم. به همین طریق در آزمایش دوم، طول جسم با سه رقم با معنی که دو رقم ۴ و ۶ ، رقم‌های مطمئن و رقم ۸، رقم مشکوک می‌باشد (زیرا در مورد دقت ریز سنج است) به دست آمده است.

درآزمایشی که $n = ۱/۵۱۶۳$ و $\Delta n = ۰/۰۱$ محاسبه شود n را به صورت $n = ۱/۵۲ \mp ۰/۰۱$ تصحیح می‌کنیم که دو رقم ۱و ۵ رقم‌های مطمئن و رقم۲ مشکوک است. زیرا درمرز دقت اندازه‌گیری یعنی ۰/۰۱ می‌باشد و درواقع۰/۰۱۶ بوده که به ۰/۰۲ گرد کرده‌ایم. بنابر این مقدار n را تا ۰/۰۱ که دقت اندازه‌گیری است گرد می‌کنیم.

۲ـ۸ـ زمان سنج شمارنده:

این دستگاه به طور هم‌زمان تعداد نوسان‌های کامل و زمان این نوسان‌ها را اندازه می‌گیرد.

ـ با استفاده از دگمه‌های متفاوت تعداد نوسان دلخواه خود را بر روی نمایشگر (COUNT) مشخص می کند و نوسان گر (آونگ) در بین دو شاخه حسگر به نوسان در می آورد.

ـ با هر نوسان کامل یک رقم رقم می‌شود. ضمناً زمان نوسان بر روی نمایشگر(TIME) به نمایش در می‌آید.

ـ در پایان تعداد نوسان‌ها بر روی نمایشگر(COUNT) و مدت زمان نوسان‌ها بر روی نمایشگر (TIME)ثبت می شود. برای استفاده از دستگاه به روش زیر عمل کنید.

ـ دو شاخه دستگاه را به برق شهر بزنید.

ـ کلید دستگاه را در مقابل ON قرار دهید.

ـ فیش حسگر نوری را به ترمینال SENSOR وصل کنید.

ـ دگمه RESET را فشار دهید تا نمایشگر(TIME) عدد صفر و نمایشگر(COUNT) عدد یک را نشان دهند.

ـ دگمه SET را فشار دهید تا نمایشگر COUNT چشمک بزند.

ـ دگمه (+) را فشار دهید تا تعداد نوسان مورد نظر در نمایشگر COUNT دیده شود.

ـ در صورت بیشتر شدن عدد با استفاده از دگمه (ــ) به عدد مورد نظر برسید . در این حالت عدد در حالت چشمک زدن است

ـ دگمه SET را فشار دهید تا عدد مورد نظر بر روی نمایشگر ثابت شود (n).

ـ نوسانگر را در بین دو شاخه حسگر به نوسان در آورید، (در این آزمایش گلوله علامت دهنده به حسگر نوری دربین دو شاخه نوسان می‌کند).

ـ پس از چند نوسان ، دگمه START را فشار دهید تا نمایشگر زمان به کارافتد.

ـ پس از انجام نوسان‌ها ، تعداد نوسان و زمان نوسان به وسیله نمایشگرها نمایش داده می‌شوند.

ـ با استفاده از t و n دوره تناوب T را بدست آورید.

ـ برای تکرار آزمایش کافی است ، نوسان‌گر را به نوسان درآورید و فقط دگمه START را فشار دهید.